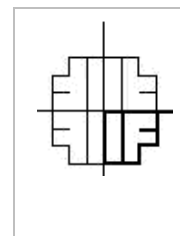




UFRGS - Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
Instituto de Física.
Mestrado Profissionalizante de Ensino de Física.
Novas Tecnologias no ensino de Física.
Professora: Eliane Angela Veit
Aluno: Luiz André Mützenberg.



Estudo do Coeficiente de Restituição da Colisão entre uma Esfera de Vidro e uma Superfície de Madeira.

Resumo.

Neste relatório será analisada a influência da rapidez de aproximação sobre o valor do coeficiente de restituição na colisão de uma esfera de vidro (bolinha de gude) com uma superfície de madeira (assento da cadeira). Para verificar se o coeficiente de restituição realmente tende a unidade, conforme consta em um livro de Física será analisada também a colisão entre a esfera de vidro e uma pedra polida.

I - Introdução.

Quando dois corpos colidem, estes sofrem deformações, de modo que a área de contato entre os corpos aumenta até atingir um valor máximo, e a partir desse momento, dependendo das propriedades dos corpos, estes tendem a retomar a sua forma original, fazendo com que os corpos voltem a se afastar entre si.

Se durante o contato entre os corpos não houver perda de energia mecânica, estes terão rapidez de afastamento com o mesmo valor da rapidez de aproximação. Porém este tipo de colisão não ocorre no mundo macroscópico, onde sempre há perda de energia mecânica.

Durante uma colisão, forças impulsivas, de curta duração e grande intensidade atuam sobre as estruturas dos corpos em contato, quanto maior for a rapidez de aproximação, tanto maior será o módulos das forças impulsivas, aumentando significativamente a perda de energia mecânica quando estas forças atingem intensidades suficientes para romper as estruturas dos corpos.

Para estudar as colisões entre os corpos há uma grandeza física útil, o coeficiente de restituição, que foi definido como sendo o

quociente entre os módulos da impulsão de restauração e de deformação. Porém, pelo que foi exposto no parágrafo anterior, o coeficiente de restituição não deve depender somente das propriedades dos corpos que colidem, ele também deve depender da velocidade de aproximação entre os corpos.

II - Base Teórica.

O coeficiente de restituição foi definido como sendo o quociente entre os módulos da impulsão de restauração, \mathbf{P}_r e de deformação, \mathbf{P}_d . Sendo a impulsão definida pela como:

$$\mathbf{P} = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F} \times dt = \mathbf{m} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \quad (1)$$

onde F é o modulo da força de interação, m é a massa da partícula, v é a velocidade da partícula no instante t_i e u é a velocidade da partícula no instante t_f . Definindo w como a velocidade no instante de deformação máxima posso escrever o coeficiente de restituição para as duas partículas como sendo:

$$e = \frac{\mathbf{m}_1 \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{w})}{\mathbf{m}_1 \cdot (\mathbf{w} - \mathbf{u}_1)} = \frac{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{w})}{(\mathbf{w} - \mathbf{u}_1)} \quad (2)$$

$$e = \frac{m_2 \cdot (w - v_2)}{m_2 \cdot (u_2 - w)} = \frac{(w - v_2)}{(u_2 - w)} \quad (3)$$

No instante em que termina o processo de deformação e se inicia o processo de restituição as duas partículas possuem a mesma velocidade, w , o que permite obter a equação (4) a partir das equações (2) e (3):

$$e = \frac{u_1 - u_2}{v_2 - v_1} \quad (4)$$

Com esta equação podemos estudar o coeficiente de restituição observando aspectos cinemáticos de uma colisão, isto é, as velocidades iniciais e finais de cada um dos corpos. Se as forças de deformação e de restauração forem iguais, as velocidades de aproximação de afastamento também serão iguais, neste caso o coeficiente de restauração será 1 (um) e a colisão será chamada de elástica. Se a força restauradora for nula, os corpos permanecem juntos após a colisão, isto é, a velocidade de afastamento é nula, conseqüentemente o coeficiente de restituição também será nulo e a colisão será chamada de plástica. Nas colisões reais não plásticas a força restauradora dificilmente será igual a força deformadora, normalmente a força restauradora é menor, o que tem por conseqüência uma velocidade de afastamento menor que a velocidade de aproximação, logo, o coeficiente de restauração será menor que 1(um) e a colisão será chamada de não elástica.

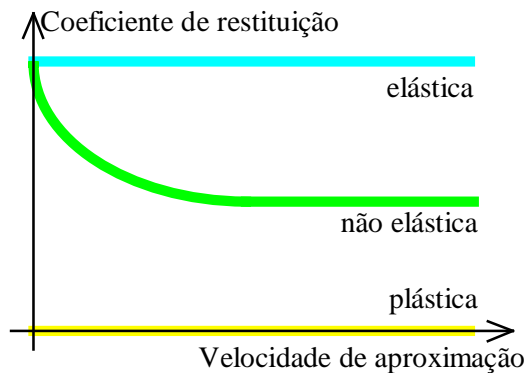


Figura 1: Relação entre Coeficiente de Restituição e Velocidade de aproximação.

O coeficiente de restituição normalmente é considerado constante para dadas geometrias e combinações de materiais em contato, mas de fato ele depende da velocidade de aproximação dos corpos e se aproxima

da unidade à medida que a velocidade de aproximação diminui, este comportamento está demonstrado esquematicamente na figura 1. Geralmente, valores retirados de manuais não são muito confiáveis.

Quando a esfera de vidro cai e colide com uma superfície horizontal, seja uma pedra apoiada sobre o chão ou o assento de madeira da cadeira, é perfeitamente possível desprezar a variação de velocidade da superfície, o que torna conveniente a escolha de um referencial em que a velocidade desta superfície seja nula, para poder simplificar a equação (4) e obter:

$$e = \frac{v_1}{u_1} \quad (5)$$

Usando esta equação há dois modos de calcular o coeficiente de restituição analisando o movimento de uma esfera quicando sobre uma superfície horizontal. O primeiro modo, consiste na comparação dos tempos entre três contatos consecutivos. Podemos usar a equação:

$$v = g \cdot t + v_i \quad (6)$$

onde g representa a aceleração da gravidade e t é a metade do tempo entre dois contatos consecutivos de modo que podemos reescrever a equação do coeficiente de restituição:

$$\epsilon = \frac{\frac{1}{2} g \cdot t_n}{\frac{1}{2} g \cdot t_{(n-1)}} \quad \epsilon = \frac{t_n}{t_{(n-1)}} \quad (7)$$

A equação (7) permite calcular o coeficiente de restituição se conseguirmos determinar dois intervalos de tempo consecutivos. O segundo modo, consiste na comparação entre duas alturas máximas consecutivas atingidas pela esfera de vidro entre os contatos com a superfície horizontal. Para estes cálculos partiremos da equação:

$$v^2 = v_i^2 + 2 \cdot g \cdot h \quad (8)$$

onde v_i e v são as velocidades no início e no final e de um deslocamento h . Como a velocidade da esfera será nula quando ela atinge a altura máxima as equações (5) e (8) permitem escrever que:

$$\epsilon = \frac{\sqrt{2 \cdot g \cdot h_{(n)}}}{\sqrt{2 \cdot g \cdot h_{(n-1)}}} \quad \epsilon = \sqrt{\frac{h_{(n)}}{h_{(n-1)}}} \quad (9)$$

e esta equação permitirá calcular o coeficiente de restituição quando se conhece duas alturas máximas atingidas entre três

contatos consecutivos com a superfície horizontal.

III - Aquisição de Dados.

Para “cronometrar” os tempos entre duas colisões consecutivas será usado um computador com placa de som e os aplicativos “WAV Player” e “Espectrogram” que está incluso no Windows 3.11 instalado em computadores “Compaq Presario CDS 524” comercializados em 1995.

O aplicativo WAV Player permite gravar sons, tornando possível a gravação dos impactos da esfera de vidro com a superfície horizontal, e também permite visualizar graficamente a onda sonora gravada, assim será possível visualizar os instantes em que a esfera esteve em contato com a superfície. Para visualizar o aspecto da tela do WAV Player abra o arquivo `wavplay1.bmp`, nesta pasta.

Outro aplicativo que permite fazer a análise do som gravado é o Espectrogram. Durante a realização desse trabalho o Espectrogram foi usado para analisar os sons já gravados pelo WAV Player. A utilização do espectrogram facilita a análise de arquivos WAV maiores, pois o seu gráfico pode se estender além dos limites da tela do computador, o que não ocorre com os gráficos do WAV Player.

Para fazer os cálculos e alguma análise gráfica dos dados obtidos foi usado o aplicativo Excel.

IV- Experimentos.

Experiência A.

Esta experiência foi realizada soltando uma única vez a esfera e gravando o som até que a esfera parasse de quicar. Para obter maior número de dados se fez a esfera quicar sobre uma pedra polida e plana. Como o coeficiente de restituição entre a esfera e a pedra é maior que o coeficiente de restituição entre a esfera e a madeira, ocorre um número maior de colisões. Outro artifício que permitiu aumentar significativamente o número de medidas foi a utilização de um tubo de papel para impedir o desloca-

mento lateral da esfera, evitando que ela caísse ao lado da pedra.

O som deste experimento está gravado como `gudealt1.wav`. Este arquivo foi analisado pelo Espectrogram para obter os instantes em que a esfera esteve em contato com pedra, os tempos conseguidos com auxílio do mouse foram registrados na planilha **Experimento A**, do arquivo `coeficie.xls` onde procurei verificar se ocorre uma variação significativa nos valores do coeficiente de restituição a medida que o intervalo entre dois contatos consecutivos diminui, isto é, procurei descobrir se existe uma relação entre a velocidade de aproximação e o coeficiente de restituição.

O material disponível para fazer esta experiência não permite soltar a esfera de alturas muito superiores aos 20cm da altura do tubo papel. Em tentativas com uso de tubos maiores, cano de PVC, houve muito atrito com as paredes do tubo, e sem a utilização do tubo ocorrem poucas colisões com a pedra.

Experiência B.

Outra alternativa para estudar a influência da velocidade de aproximação sobre o valor do coeficiente de restituição foi usar uma superfície maior, assento da cadeira, de modo que o tubo de papel pudesse ser dispensada, soltar a esfera de vidro de diferentes alturas, 25cm, 50cm, 75cm, 100cm, 125cm 150cm 175cm e 200cm. Em cada caso foi gravado um arquivo WAV, originando assim os arquivos `gude025.wav`, `gude050.wav`, `gude075.wav`, `gude100.wav`, `gude125.wav`, `gude150.wav`, `gude175.wav`, e `gude200.wav`. que também se encontram nesta pasta.

Os tempos extraídos destes arquivos, com auxílio do WAV Player, foram colocados na planilha **Experiência B**, do arquivo `coeficie.xls` e permitem refazer a análise aplicada aos tempos da primeira experiência. Nesta experiência será possível verificar o que acontece na primeira colisão, aquela em que a velocidade de aproximação possui maior módulo e que não foi incluída nas análises da experiência A.

Depois de gravar os sons das oito quedas da esfera de vidro sobre a superfície de madeira, os arquivos gerados foram abertos no WAV Player para obtenção dos instantes dos impactos.

Uma nona tabela foi gerada usando as alturas das oito quedas e o intervalo entre o primeiro e o segundo impacto de cada tabela. Com as alturas de queda foi possível calcular as velocidades de aproximação dos primeiros impactos e com os intervalos de tempo foi possível calcular as respectivas velocidades de afastamento, assim obtive os coeficientes de restituição para velocidades significativamente maiores que as velocidades que puderam ser estudadas na experiência A.

V - Análise dos Dados.

Os tempos extraídos do arquivo de som `gudealt1.wav` foram listados na coluna Tempo (s) da planilha Experiência A, a partir desses tempos foram calculados, os intervalos em segundos e que permitiram calcular os coeficientes de restituição usando a equação (7). Na coluna velocidade foi calculada a velocidade com que a esfera se aproxima da superfície usando equação (6) e considerando a aceleração da gravidade, $g=9,81\text{m/s}^2$, a velocidade inicial, no topo da trajetória entre dois contatos consecutivos, $v_i=0$, e o tempo de queda igual a metade do intervalo entre dois contatos. Este cálculo foi feito para que seja possível fazer uma análise da relação entre o coeficiente de restituição e a velocidade de aproximação.

Pressupondo que a coeficiente de restituição seja uma constante, foram calculados os tempos usando a equação:

$$t = t_0 e^N \quad (10)$$

Para encontrar os melhores valores de t_0 e ε pelo o método dos mínimos quadrados foi utilizado o solver, recurso presente na Excel. Através desse procedimento foi encontrado o valor para o coeficiente de restituição $e=0,9556$ e o tempo $t_0=0,4408$ s. Este tempo corresponde a um “salto” que não aconteceu, ele é o dobro do tempo de queda da esfera quando ela foi solta e permite, portanto, calcular a altura da qual a

esfera foi solta, infelizmente esta medida não foi feita não é possível testar a coerência dos resultados encontrados com o fato experimental.

No **Gráfico 1: Intervalo de tempo entre dois impactos consecutivos em função da ordem da colisão**, está plotado o intervalo entre duas colisões consecutivas em função do número do contato com a superfície fica evidente que o intervalo de tempo entre dois contatos consecutivos diminui a cada colisão conforme a equação. Está constatação leva a crer que provavelmente, no intervalo de velocidades que pode ser estudado com os dados dessa experiência, o coeficiente de restituição é constante.

Outros cálculos foram realizados para verificar se existe alguma tendência, crescente ou decrescente nos valores do coeficiente de restituição, para tanto foram cogitadas mais cinco hipóteses matemáticas simples:

Hipótese A: $E=aV+b$ (linear)

Hipótese B: $E=aV^2+bV+c$ (quadrática)

Hipótese C: $E=a.e^{bV}$ (exponencial)

Hipótese D: $E=a.\ln(V)+b$ (logarítmica)

Hipótese E: $E=a.V^b$ (potencial)

Para cada um desses valores foram calculados os possíveis valores do coeficiente de restituição e depois comparados com os valores experimentais, a fim de encontrar a melhor aproximação usado o solver para aplicar o método dos mínimos quadrados. Considerando uma margem de erro muito pequena, a soma dos quadrados dos desvios foi a mesma para todas as hipóteses e também coincidiu com a hipótese sugerida no roteiro que recebemos para fazer a experiência, Hipótese 0, portanto podemos realmente considerar que no intervalo de velocidades estudado o coeficiente de atrito é constante e tem valor:

$$\varepsilon = 0,956$$

No **Gráfico 2: Coeficiente de Restituição em função da Velocidade de Aproximação**. Está claro que para velocidades pequenas há erros de medida muito maiores que para velocidade grandes, isto é facilmente explicado se considerarmos que os intervalos de tempo medidos com auxílio do Espectrogram diminuem e portanto um erro

de 1/1000 de segundo que é a resolução pelo aplicativo corresponde a uma porcentagem de erro muito maior.

O segundo experimento foi pensado para confirmar o que foi observado no primeiro quando as alturas são pequenas (velocidade de aproximação tendendo a zero) e permitir um estudo sobre o comportamento do coeficiente de restituição quando a velocidade de aproximação adquire valores cada vez maiores.

Observando os valores calculados para os coeficientes de restituição, verifica-se em todas as tabelas que o primeiro coeficiente de restituição é maior que o último coeficiente de restituição, demonstrando assim que existe uma tendência de aumento do coeficiente de restituição quando a velocidade de aproximação tende a zero, mas também neste caso será difícil saber se o coeficiente de restituição tende a um quando a velocidade de aproximação tende a zero.

Para cada tabela calculei os valores do coeficiente de restituição em função da velocidade utilizando as cinco hipóteses já relatadas e com ajuda do solver tentei encontrar qual curva se ajustava melhor aos dados experimentais.

Em quatro tabelas o melhor ajuste foi conseguido pela hipótese E, uma tabela se ajustou melhor a hipótese D, uma se ajustou melhor a hipótese B e para duas tabelas a soma dos quadrados dos desvios foi a mesma aplicando as hipóteses A e B. Na maioria das tabelas o pior ajuste ocorreu para a hipótese 0, demonstrando claramente que o coeficiente de restituição entre a esfera de vidro e a madeira não é constante nem mesmo para o intervalo de baixas velocidades que ocorre a partir do segundo impacto.

Finalmente, na última tabela, em que faço uso das alturas de que soltei a esfera para calcular a primeira velocidade de aproximação, e do primeiro intervalo de tempo de cada uma das tabelas está evidente que o coeficiente de restituição diminui quando a velocidade de aproximação aumenta, o que pode ser facilmente visualizado no gráfico.

Neste caso também foram analisadas as cinco hipóteses e o melhor ajuste aconteceu quando considerei a hipótese B.

VI - Conclusão.

Considerando os textos de MERIAM sobre o coeficiente de restituição, creio que este trabalho confirma a primeira parte das afirmações do autor:

“Ele depende da velocidade de impacto...”

Porém a segunda parte:

“e se aproxima da unidade à medida que a velocidade de impacto decresce, conforme mostrado esquematicamente na figura 1.

Não é confirmada. Podemos inclusive entender que o experimento A expõe resultados que demonstram que o coeficiente de restituição tende a um valor constante, estando de acordo com as proposta do roteiro dessa experiência. Na segunda experiência encontrei resultados não coerentes com a base teoria apresentada no roteiro dessa experiência.

Acredito que são necessários mais experimentos para estudar por exemplo o comportamento do coeficiente de restituição entre a esfera de vidro e a pedra quando a velocidade de aproximação é grande e para descobrir qual o tipo de relação que ocorre entre o coeficiente de restituição e a velocidade de aproximação quando temos uma colisão entre a esfera de vidro e a madeira.

Bibliografia.

MERIAM, James L. *Dinâmica*. 2ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 1989. P. 219-222
<http://www.if.ufrgs.br/cref/ntef/mecânica/restituicao/restituicao.html>